Algebra
&
Analyza

Jaromir Kligl

February 2025

Contents

Predmluva

Tento text slouzi jako studentska sbirka prikladu. Veskere prikaldy byly prevzane z hodin Elisky Foltasove. Tento text neni officialni studijni material, pokud jsem nejaky priklad prepsal spatne, neberu za to zodpovednost.

Part I
Analyza

1 1. Hodina

1.1 Najdete Prim. Funkci

$$\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}\,dx \qquad \int (x+\frac{1}{x^2})^2\,dx$$

$$\int \frac{x+1}{x-1}\,dx \qquad \int \frac{2x^3-3x^2+5x^2+5x-4}{x-2}\,dx$$

$$\int \sqrt{x}\cdot(1+\sqrt[3]{x})\,dx$$

1.2 Najdete Prim. Funkci

$$\int (\frac{\sin^2 x}{\cos x})\,dx \qquad \int \sin^2 x+\cos^2 x\,dx$$

$$\int \frac{1+\sin^2 x}{1-\cos^2 x}\,dx \qquad \int \tan^2 x\,dx$$

1.3 Vyreste s per partes

$$\int \ln x\,dx \qquad \int x^2\cdot e^x\,dx$$

$$\int x\cdot\cos x\,dx \qquad \int x^3\cdot\ln x\,dx$$

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx$$

2 2. Hodina

2.1 S vyuzitim metody substituce, integrujte

$$\int (5x-1)^3 dx \qquad \int \frac{5x}{(x^2+4)^3} dx$$

$$\int \sqrt[3]{4x-7} dx \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1+\ln x}} dx$$

$$\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx \qquad \int \frac{\ln^4 x}{x} dx$$

$$\int e^{3-2x} dx \qquad \int x \cdot e^{x^2} dx$$

$$\int e^{1+\sin x} dx \qquad \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$$

$$\int \cos \frac{x}{4} dx \qquad \int \cot(2x+1) dx$$

$$\int \sin^3 x \cdot x dx$$

2.2 Integrujte s metodou rozkaldu na parcialni zlomky

$$\int \frac{5}{x^2-9x+14} dx \qquad \int \frac{3x+7}{x^2+2x-15} dx$$

$$\int \frac{4x^2-x-15}{x^3-4x^2-x+4} dx \qquad \int \frac{x^2+1}{x^3-x} dx$$

$$\int \frac{3x^2+30x-120}{x^3-5x^2-4x+20} dx$$

3 3. hodina

3.1 Urcete obsah plochy

plocha je ohranicena funkci $y = -x^2 + 4$ a osou x.

3.2 Urcete obsah plochy

ohraniceny funkcema:

1. $f(x) : y = x^2 - x + 1$
2. $g(x) : y = -x^2 + 3x$

4 4. hodina

4.1 Urcete objem telesem daneho funkci.

Za pouziti vzorce:

$$\pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

$$\begin{array}{lll} 1) & f(x) : \dfrac{1}{x^3} & a = \dfrac{1}{2}; b = 1 \\ 2) & g(x) : \cos x & a = 0; b = \dfrac{\pi}{2} \end{array}$$

4.2 Urcete hodnotu nevlastniho integralu. Pokud konverguje

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x+1}$$

$$\int_{-\infty}^2 e^{2x} dx$$

Part II
Algebra

5 1. Hodina

5.1 Na $\mathbb{Z}$ je dana Operace $\circ$

$$a \circ b : 3a + 3b$$

Overte:

a) Asociativitu

b) Komutativitu

c) ma $(\mathbb{Z}, \circ)$ neutralni prvek?

d) na $(\mathbb{Z}, \circ)$ inverze?

5.2 Doplnte tabulku tak aby G = ({a,b,c}; ♠)

♠	**a**	**b**	**c**
a	a	c	a
b			b
c			

1. G byl grupoid s neutralnimi prvky
2. G byl grupoid s inverznimi prvky
3. G byla pologrupa
4. G byla Grupa

5.3 je $B = \{2k | k \in \mathbb{N}_0\}$ podgrupou $(\mathbb{Z}; \oplus)$

5.4 je dana struktura: $(\mathscr{A}; \diamondsuit)$

$$\diamondsuit : a \diamondsuit b = b$$

O jakou strukturu se jedna?

6 2. hodina

Pred resenim si zopakujte znalost pojmu:

- homomorfismus (grupoidu, grup atd..), izomorfismus
- generator grupy
- rad prvku
- Caleyho graf

6.1 jsou grupoidy $(\mathbb{Z}_2; \oplus)$ a $(\{1, -1\}; \odot)$ izomorfni ?

6.2 jsou grupoidy $(\{a, b, c, \}; \odot)$ a $(\{1, 2, 3\}; \star)$ izomorfni ?

$\odot$	**a**	**b**	**c**
a	a	c	a
b	c	a	b
c	a	b	c

$\star$	**1**	**2**	**3**
1	1	3	2
2	2	3	1
3	3	1	2

6.3 Je Grupa $(\mathbb{Z}_{10}; \oplus)$ cyklicka?

V kladnem priklade urcete jeji generator a rady vsech prvku.

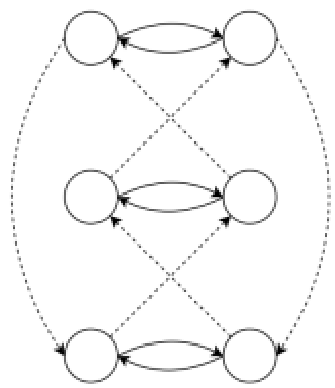
6.4 Pro grupu $(\mathbb{Z}_{10}; \oplus)$ urcete nejmepsi podgrupu

- Obsahujici prvek 2
- Obsahujici prvek 3

6.5 Urcete vsechny generatory grupy $(\mathbb{Z}_6; \oplus)$

6.6 Jen nasledujici obrazek Cayleho graf?

V kladnem pripade naleznete odpovidajici grupu.



6.7 Zakreslete Cayleho graf grupy $(\mathbb{Z}_{12}; \oplus)$ s generujici mnozinou {2,3}

6.8 Na mnozine A = {1,2,3,4,5} jsou zadany permutace.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Zapiste permutace $\sigma \circ \psi$ a $\psi \circ \sigma$.

6.9 Pro predchozi mnozinu A urcete:

1. jednotku grupy $(S_A; \circ)$, kde S_A je mnozina vsech permutaci na A a $\circ$ je operace skaladni permutaci

2. inverzni prvky k σ a ψ

7 3. hodina

Hodina 2. odpadla takze jsme pocitaly priklady z hodiny 2.

8 4. hodina

8.1 Na mnozine A = {1,2,7} je dana permutace

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 2 & 4 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Urcete rozklad A dany σ a zakrteslete ho.

8.2 Pro permutace urcete zda

1. Jde o cyklus?
2. Pokud ano, jeho delku.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 2 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 3 & 4 & 1 & 9 & 5 & 6 & 2 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

8.3 Vyjadrete permutaci jako soucin disjunktnich cylku

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 3 & 4 & 1 & 9 & 5 & 6 & 2 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

8.4 Na mnozine A = {1,2,3,4} naleznete

takove dvojice[1] , aby soucin nebyl cyklus.

8.5 Rozhodnete paritu permutace

[2]

$$\omega = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 4 & 5 & 6 & 3 & 8 & 7 & 1 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 4 & 5 & 2 & 6 & 3 & 8 & 7 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

[1] Tohle rozlustil socka.

[2] Z duvodu meho prepisu me uteklo cislo 2 tak jsem ho doplnil, na 2 nejvic pravdepodobne pozice aspon z jednohu prikladu vznikly 2.

8.6 Pro podgrupu G = ({0,2,4,6,8}; $\oplus$) grupy $(\mathbb{Z}_{10}, \oplus)$

naleznete leve a prave tridy G.

8.7 Urcete index G z minuleho prikladu.

9 5. Hodina

Pojmy k hodine:

- **Rozlozitelna grupa -** izomorfni s direktnim soucinem svych dvou ruznych podgrup
- **nerozlozitelna grupa -** jeji rad je mocninou prvocisla
- **Normalni podgrupa H -** leve a prave tridy jsou shodne:
  $a \cdot H = H \cdot a : \forall a \in G$ [3]

9.1 Rozhodnete, zda jsou grupy rozlozitelne

1. $(\mathbb{Z}_6, \oplus)$
2. $(\mathbb{Z}_5, \oplus)$
3. $(\mathbb{Z}_9, \oplus)$

9.2 Pro grupu $(\mathbb{Z}_6, \oplus)$ ukazte ze je rozlozitelna.

9.3 Rozhodnete zda se jedna o homomorfismus

(pripadne izomorfismus)

1. $f_1(x) = x, (\mathbb{Z}, \oplus) \to (\mathbb{R}, \oplus)$
2. $f_2(x) = x, (\mathbb{Z}, \oplus) \to (\mathbb{N}, \oplus)$
3. $f_3(x) = 2x, (\mathbb{Z}_3, \oplus) \to (\mathbb{Z}_6, \oplus)$
4. $f_4(x) = x, (\mathbb{Z}_3, \oplus) \to (\mathbb{Z}_6, \oplus)$

[3] Pismeno G rozlustil vasnivy resitel Socka

9.4 Naleznete nejaky homomorfismus

ze $(\mathbb{Z}_6, \oplus) \to (\mathbb{Z}_3, \oplus)$

9.5 Naleznete zda jsou dane podgrupy normalni

- $(\mathbb{R}^+, \odot)$ v $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \odot)$,
- $(\{id, (1,2)\}, \circ)$ v $(\mathbb{S}_3, \odot)$,

9.6 Rozhodnete, zda se jedna o homomorfismus

pripadne urcete kernel

1. $f_1(x) = 2x + 1, (\mathbb{Z}, \oplus) \to (\mathbb{R}, \oplus)$
2. $f_2(x) = \log |x|, (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \odot) \to (\mathbb{R}, \oplus)$
3. $f_3(x) = |x|, (\mathbb{R}, \oplus) \to (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \oplus)$
4. $f_4(x) = 2^x, (\mathbb{R}, \oplus) \to (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \odot)$